Bijection

Bijection 1
1. Qu’est qu’une bijection ? 2
2. Bijection réciproque 5
3. Courbe réprésentative de la bijection réciproque 7
4. Bijection et variation 10
5. THÉORÈME DE LA BIJECTION 13
6. Propriété « dérivabilité implique continuité » 16

1. Qu'est qu'une bijection ?

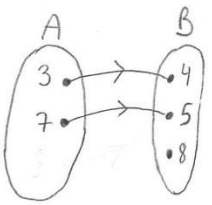
Définition

f est une bijection de A <u>sur</u> B ssi
$\begin{cases} f \text{ une fonction de } A \text{ dans } B \\ \text{tout élément de } B \text{ possède un et un seul antécédent par } f \end{cases}$.

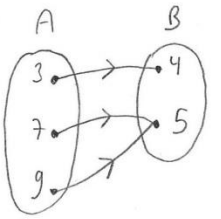
Exercice 1

Les fonctions suivantes sont des fonctions de A dans B.
Sont-elles des bijections de A sur B ?
Si non, pourquoi ?

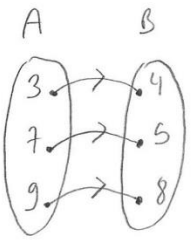
ⓐ



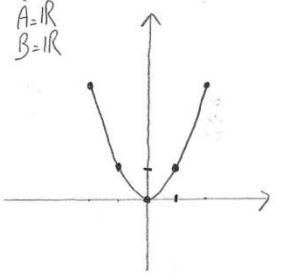
ⓑ



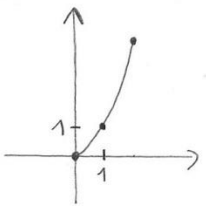
ⓒ



ⓓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
$A = \mathbb{R}$
$B = \mathbb{R}$



ⓔ $f : [0;+\infty[\to [0;+\infty[: x \mapsto x^2$
$A = B = [0;+\infty[$



Résolution de l'exercice 1

a) C'est une fonction de A dans B.

Ce n'est pas une bijection de A sur B car 8 n'a pas d'antécédent.

b) C'est une fonction de A dans B.

Ce n'est pas une bijection de A sur B car 5 a deux antécédents (7 et 9).

c) C'est une fonction de A dans B.

C'est une bijection de A sur B.

d) C'est une fonction de A dans B.

Ce n'est pas une bijection de A sur B car 4 a deux antécédents (-2 et 2) .

Remarque :

Ce n'est pas une bijection car :

- 4 a deux antécédents (-2 et 2)
- 9 a deux antécédents (-3 et 3)
- …
- -1 n'a pas d'antécédent
- $-\pi$ n'a pas d'antécédent
- …

Il y a donc une infinité de raisons qui justifient que ce n'est pas une bijection. Néanmoins, une seule raison suffit pour ne pas en faire une bijection.

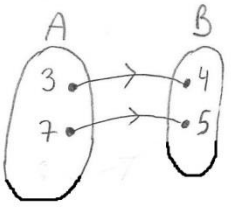
e) C'est une fonction de A dans B.

C'est une bijection de A sur B.

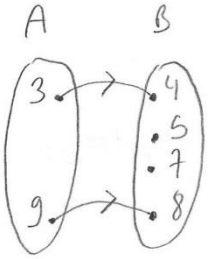
Exercice 2

Les fonctions suivantes sont des fonctions de A dans B.
Sont-elles des bijections de A sur B ?
Si non, pourquoi ?

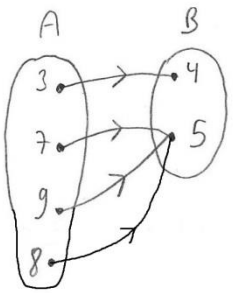
ⓐ



ⓑ



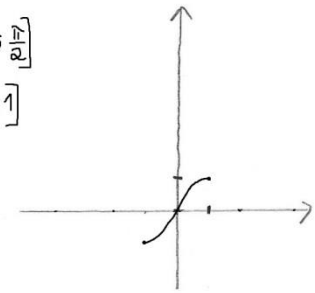
ⓒ



ⓓ $f : \left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1] : x \mapsto \sin(x)$

$A = \left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

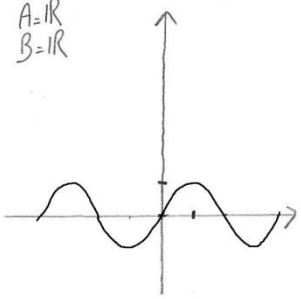
$B = [-1;1]$



ⓔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$

$A = \mathbb{R}$

$B = \mathbb{R}$



2. Bijection réciproque

Propriété

Soit f une bijection de A sur B.
Alors il existe une unique fonction g, appelée bijection réciproque de f, tel que :

- g est une bijection de B sur A.
- Pour tout $y \in B$, $g(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f.

Preuve
Soit la fonction $g: B \to A$ telle que pour tout y dans B,

$g(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f.

- Soit $x \in A$.
  Il existe un $y \in B$ tel que $f(x) = y$.
  x est l'unique antécédent de ce y par f.
  x est l'image de ce y par g.
  Ce y est un antécédent de x par g.
  x possède au moins un antécédent par g.
- Soit $x \in A$.
  Supposons que $g(y) = x$ et $g(y') = x$.
  x est l'antécédent de y par f et x est l'antécédent de y' par f.
  Comme f est une fonction, x a une seule image et donc $y = y'$.
  x possède au maximum un antécédent par g.
- Comme tout x de A possède un et un seul antécédent par g, g est une bijection de B sur A.

- Supposons que h est une autre bijection de B sur A tel que pour tout $y \in B$,

  $h(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f.

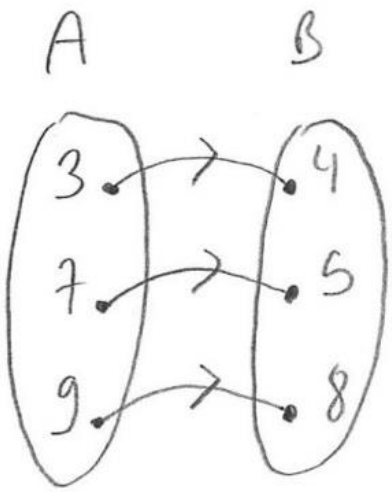
  Pour tout $y \in B$: $g(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f
  $h(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f
  $g(y) = h(y)$.

  La fonction g est donc égale à la fonction h.
  La fonction g est donc unique.

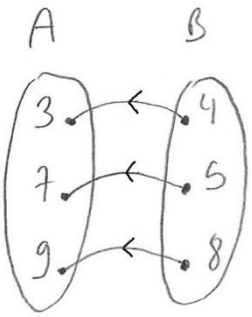
c.q.f.d.

Exercice 3

Donner la bijection réciproque de la fonction suivante qui va de A dans B.

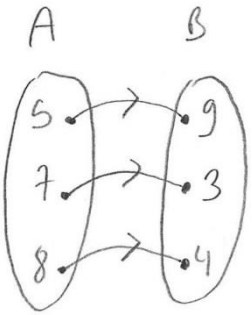


Résolution de l'exercice 3



Exercice 4

Donner la bijection réciproque de la fonction suivante qui va de A dans B.



3. Courbe réprésentative de la bijection réciproque

Propriété

Soit f une bijection de $A \subseteq \mathbb{R}$ sur $B \subseteq \mathbb{R}$ et g la bijection réciproque de f.
Alors, dans un repère orthonormal, les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Preuve
Mettons-nous dans un repère orthonormal.
Soit un point $A(x; y)$.
Calculons les coordonnées du point A''', l'image du point A par s, la symétrie axiale dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.
Cette symétrie axiale s revient à faire :

- une rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{4}$, son équation complexe est $z' = e^{i\frac{-\pi}{4}}z$
- suivie d'une symétrie axiale dont l'axe est l'axe des abscisses, son équation complexe est $z'' = \overline{z'}$
- suivie d'une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, son équation complexe est $z''' = e^{i\frac{\pi}{4}}z''$.

$z_A = x + iy$

$z_{A'} = e^{i\frac{-\pi}{4}}(x + iy) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(x + iy) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}iy - \frac{\sqrt{2}}{2}ix + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

$z_{A''} = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}iy + \frac{\sqrt{2}}{2}ix + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

$z_{A'''} = e^{i\frac{\pi}{4}}z_{A''} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z_{A''}$

$z_{A'''} = \frac{2}{4}x - \frac{2}{4}iy + \frac{2}{4}ix + \frac{2}{4}y + \frac{2}{4}ix + \frac{2}{4}y - \frac{2}{4}x + \frac{2}{4}iy = y + ix$

$A'''\binom{y}{x}$.

Soit $B \in (\mathcal{C}_f)$ alors $B(a; f(a))$ pour un réel a
$B'''(f(a); a)$ est l'image du point B par symétrie axiale s
$g(f(a)) = a$
$B''' \in (\mathcal{C}_g)$.

Donc, l'image d'un point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie axiale s est un point de la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

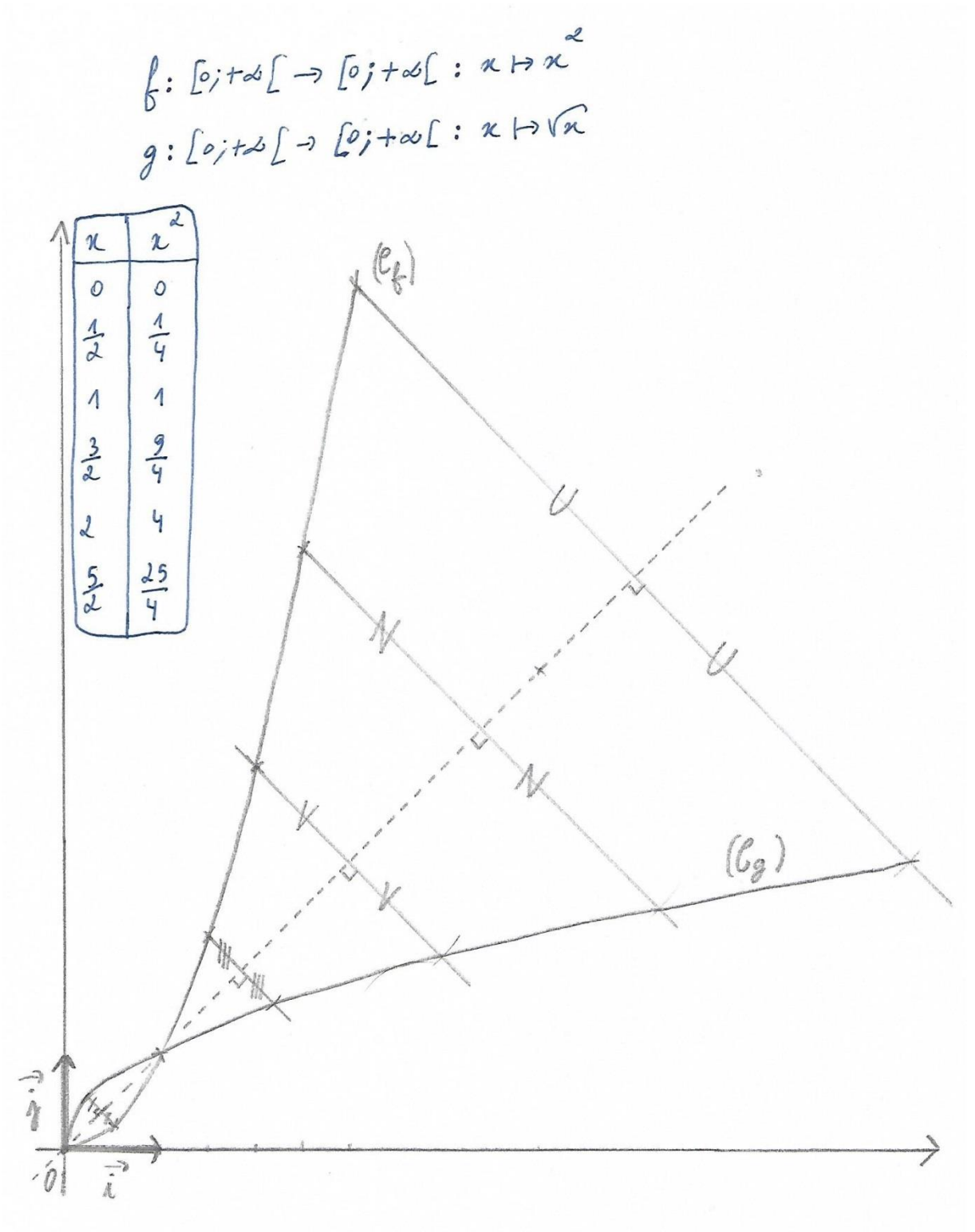
Soit $B \in (\mathcal{C}_g)$ alors $B(a; g(a))$ pour un réel a
$B'''(g(a); a)$ est l'image du point B par symétrie axiale s
$f(g(a)) = a$
$B''' \in (\mathcal{C}_f)$.

Donc, l'image d'un point de la courbe $(\mathcal{C}_g)$ par la symétrie axiale s est un point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
Par conséquent, les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
c.q.f.d.

Exercice 5

Soit la fonction $f: [0; +\infty[\to [0; +\infty[: x \mapsto x^2$.
f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.
Donner la fonction réciproque g de la fonction$f$.
Dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm, tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ et la droite d'équation $y = x$ qui est l'axe de symétrie de la symétrie axiale qui applique $(\mathcal{C}_f)$ sur $(\mathcal{C}_g)$.

Résolution de l'exercice 5



Exercice 6

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \to]0; +\infty[: x \mapsto e^x$.
f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.
Donner la fonction réciproque g de la fonction$f$.
Dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm, tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ et la droite d'équation $y = x$ qui est l'axe de symétrie de la symétrie axiale qui applique $(\mathcal{C}_f)$ sur $(\mathcal{C}_g)$.
Aide : pensez à un mot de deux lettres commençant par l et finissant par n.

4. Bijection et variation

Propriété

1) Si f est une fonction strictement croissante sur A,
   alors la restriction de f à A est une bijection de A sur l'image de A par f.
2) Si f est une fonction strictement décroissante sur A,
   alors la restriction de f à A est une bijection de A sur l'image de A par f.

Preuve

1) Soit f une fonction strictement croissante sur A.
   Soit g la restriction de f à A.
   Notons l'ensemble B l'image de l'ensemble A par f.
   La fonction g est une fonction qui va de A sur B, c'est à dire que chaque élément de B possède un antécédent.
   Montrons que cet antécédent est unique.
   Soit un y appartenant à B.
   Supposons que y a deux antécédents différents x_1 et x_2 .
   Supposons que $x_1 < x_2$.
   On a donc $g(x_1) = g(x_2) = y$.
   Comme f est strictement croissante sur A, g est aussi strictement croissante sur A.
   Donc, $g(x_1) < g(x_2)$; $g(x_1) \neq g(x_2)$.
   On a aussi $g(x_1) \neq g(x_2)$ si on suppose que $x_1 > x_2$.
   On a donc une contradiction, et donc y a un et un seul antécédent.
   g est une bijection de A sur B.
2) La preuve est similaire.

c.q.f.d.

Exercice 7

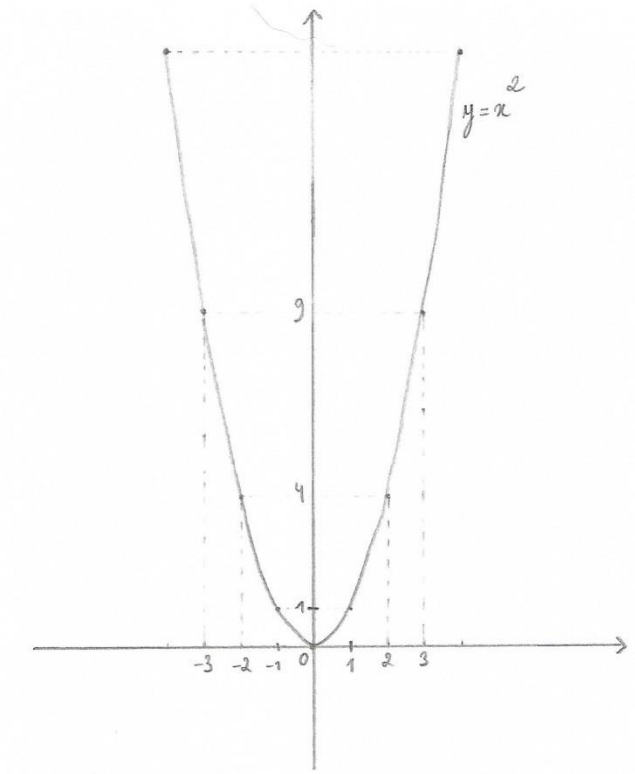
a) Dans un repère orthonormal, tracer, entre $x = -4$ et $x = 4$, la courbe de la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^2$.

b) Déterminer l'image de l'ensemble $E = [2; 3]$ par la fonction f.
Donner la restriction de la fonction f à E. Est-ce une bijection ?

c) Déterminer l'image de l'ensemble $H = [-3; -2]$ par la fonction f.
Donner la restriction de la fonction f à H. Est-ce une bijection ?

d) Déterminer l'image de l'ensemble $E \cup H = [-3; -2] \cup [2; 3]$ par la fonction f.
Donner la restriction de la fonction f à $E \cup H$. Est-ce une bijection ?

Résolution de l'exercice 7

- 

- $f[\![E]\!] = [4; 9]$
  $f \restriction E: [2; 3] \to [4; 9]: x \mapsto x^2$
  C'est une bijection.
- $f[\![H]\!] = [4; 9]$
  $f \restriction H: [-3; -2] \to [4; 9]: x \mapsto x^2$
  C'est une bijection.
- $f[\![E \cup H]\!] = [4; 9]$
  $f \restriction E \cup H: [-3; -2] \cup [2; 3] \to [4; 9]: x \mapsto x^2$
  Ce n'est pas une bijection car 9 a deux antécédents : -3 et 3.

Remarque :
On a utilisé ici :

- $f \restriction E$ pour la restriction de la fonction f à E
- $f[\![E]\!]$ l'image de l'ensemble E par la fonction f.

D'autres notations sont possibles.

Exercice 8

a) Dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm, tracer, entre $x=-2$ et $x=6$, la courbe de la fonction

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto|x-2|+3.$$

Aide :

- Partez de la courbe de $x\mapsto|x|$.
- Une translation de vecteur $2\vec{\imath}$ vous donnera la courbe de $x\mapsto|x-2|$.
- Une autre translation de vecteur $3\vec{\jmath}$ vous donnera la courbe de $x\mapsto|x-2|+3$.
- Donc la courbe de $x\mapsto|x-2|+3$ est juste la courbe de $x\mapsto|x|$ qui a subi une translation de vecteur $2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$.

b) Déterminer l'image de l'ensemble $E=[3;5]$ par la fonction f.
Donner la restriction de la fonction f à E. Est-ce une bijection ?

c) Déterminer l'image de l'ensemble $H=[0;2]$ par la fonction f.
Donner la restriction de la fonction f à H. Est-ce une bijection ?

d) Déterminer l'image de l'ensemble $E\cup H=[0;2]\cup[3;5]$ par la fonction f.
Donner la restriction de la fonction f à $E\cup H$. Est-ce une bijection ?

5. THÉORÈME DE LA BIJECTION

Théorème des valeurs intermédiaires

Si a et b sont deux réels tels que $a < b$
f est une fonction dans les réels
f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$,
alors

i. CAS où $f(a) < f(b)$:
pour tout $k \in [f(a); f(b)]$, il existe un réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

ii. CAS où $f(a) = f(b)$: il existe un réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = f(a)$.

iii. CAS où $f(a) > f(b)$:
pour tout $k \in [f(b); f(a)]$, il existe un réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = k$.

Démonstration
Le cas ii est trivial et le cas iii se démontre de la même manière que le cas i.
Démontrons le cas i en utilisant la méthode de dichotomie :

Soient les suites (a_n): $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n & si\ f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq k \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & si\ f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$ et (b_n): $\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & si\ f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq k \\ b_{n+1} = b_n & si\ f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$.

Par récurrence, pour tout entier naturel n, $a \leq a_n \leq b_n \leq b$.
Ce résultat ci-dessus est à utiliser pour prouver les deux preuves par récurrences suivantes.
Par récurrence, la suite (a_n) est croissante.
Par récurrence, la suite (b_n) est décroissante.
Comme $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ et $b_0 - a_0 = b - a$, la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $b - a$, d'où $b_n - a_n = (b - a)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0\ .$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et convergent donc vers la même limite l avec $a_n \leq l \leq b_n$.
Comme f est continue en l,

$$\lim_{x\to l} f(x) = f(l)\ .$$

Par composition, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(l)\ \ et\ \ \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(l).$$

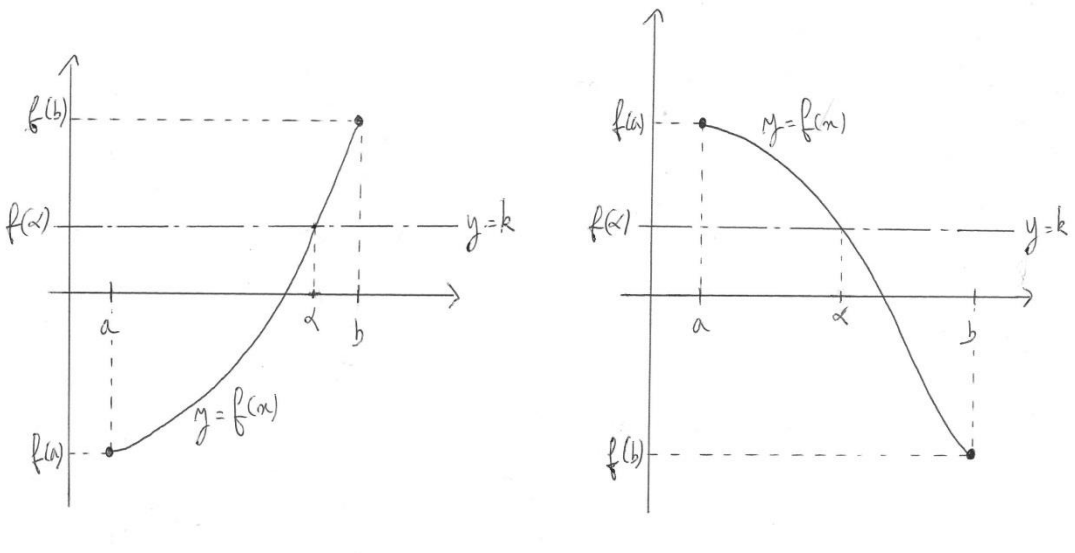
Par récurrence, on a $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$.
Par le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} k = f(l)$$

et donc, $k = f(l)$.
Il existe donc bien un réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = k$.
Il suffit de prendre $\alpha = l$.
c.q.f.d.

Théorème de la bijection

Si a et b sont deux réels tels que $a < b$
f est une fonction dans les réels
f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$
f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a; b]$
$f(a) < f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$),
alors pour tout $k \in [f(a); f(b)]$ (resp. $[f(b); f(a)]$),
il existe un unique réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = k$.



Démonstration
Supposons que la fonction f est strictement croissante.
Soit un réel $k \in [f(a); f(b)]$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α appartenant à l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(\alpha) = k$.
Soit α_1 un réel appartenant à l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(\alpha_1) = k$.
Soit α_2 un réel appartenant à l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(\alpha_2) = k$.
Supposons que $\alpha_1 \neq \alpha_2$.
Comme $f(\alpha_1) = k$ et $f(\alpha_2) = k$, on a $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$.
Mais f est strictement croissante alors soit $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ ou $f(\alpha_2) < f(\alpha_3)$ d'où $f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$.
On a une contradiction.
Donc, $\alpha_1 = \alpha_2$.
Par conséquent, il existe un unique réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = k$.
Le cas où la fonction f est strictement décroissante se traite de la même manière.
c.q.f.d.

Exercice 9

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$, et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune de ces solutions par la méthode du balayage.

Exercice 10

Déterminer le nombre de solution de l'équation $-2x^3 - 3x^2 + 36x - 35 = 10$, et un encadrement d'amplitude 10^{-3} de chacune des solutions par la méthode du balayage.

Exercice 11

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $2x^3 - 9x^2 - 24x + 1 = 0$, et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune de ses solutions par la méthode du balayage.

Exercice 12

Déterminer le nombre de solution de l'équation $-x^3 - 6x^2 + 36x - 30 = 12$, et un encadrement d'amplitude 10^{-3} de chacune ses solutions par la méthode du balayage.

Solutions des exercices 9 à 12

1) L'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet exactement 3 solutions α_1, α_1 et α_1 telles que :
$$\alpha_1 \in [-1{,}88\,;\,-1{,}87]$$
$$\alpha_2 \in [0{,}34\,;\,0{,}35]$$
$$\alpha_3 \in [1{,}53\,;\,1{,}54]\,.$$
2) L'équation $-2x^3 - 3x^2 + 36x - 35 = 10$ admet une et une seule solution α telle que :
$$-5{,}509 \leq \alpha \leq -5{,}508\ .$$
3) Il y a 3 et seulement 3 solutions α_1, α_1 et α_1 telles que :
$$-1{,}92 \leq \alpha_1 \leq -1{,}91$$
$$0{,}04 \leq \alpha_2 \leq 0{,}05$$
$$6{,}37 \leq \alpha_3 \leq 6{,}38\ .$$
4) Il y a exactement une solution α telle que :
$$\alpha \in [-10{,}014\,;\,-10{,}013]\ .$$

6. Propriété « dérivabilité implique continuité »

Propriété

Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I non nul alors elle est continue sur cet intervalle.

Démonstration

Soit $a \in I$.

Pour tout $x \in I$ et différent de a:

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ (x-a)$

$f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ (x-a) + f(a).$

Posons $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ et différent de a.

On a :

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$ car f est dérivable sur I (1)

$\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$ (2)

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\ (x-a) = 0$ (3) grâce à (1) et (2)

$\lim\limits_{x\to a} f(a) = f(a)$ (4)

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)$ grâce à (3) et (4).

On a donc

$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f(x) = f(a)$

d'où

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

f est continue en a.

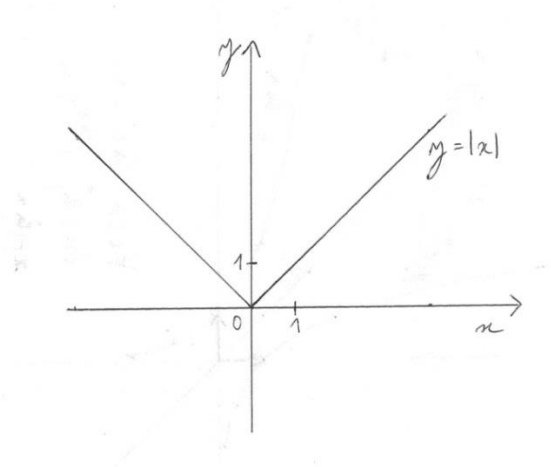
c.q.f.d.

Remarque

Intuitivement une fonction dans $\mathbb{R}$ est continue si sa courbe peut être tracée sans lever la main.

Remarque

La réciproque de cette propriété n'est pas vraie.
En effet, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est dérivable partout sauf en 0).



Prouvons que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $]0; +\infty[$ et donc la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $]0; +\infty[$.
La fonction $x \mapsto -x$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et donc la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $]-\infty; 0[$.
On a :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} -x = 0 = |0|$ (1)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x = 0 = |0|$ (2)

$|0| = 0$ (3)

$\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$ d'après (1) , (2) et (3)

d'où la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0.

Conclusion : la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

Prouvons que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} -1 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} 1 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$ n'existe pas

Conclusion : la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Bijection